SUJETS D'EXAMEN AVEC DES ELEMENTS DE CORRIGE

Exercices sur la théorie du consommateur (14 points)

Problème (6 points)

Les économètres et les statisticiens de Banque Des Etudes ont établi que le taux de réussite des étudiants en 1ère année sciences économiques et de gestion dépend du nombre d'heures de cours (C) et d'heures de TD (D). Le taux de réussite noté T obéit à la fonction suivante :

$$\boxed{T = C^{1/3}.D^{1/4}}$$

T : représente la proportion d'étudiants admis en nombre de points de pourcentage (ex. : T=20 signifie 20% d'admis)

C : le nombre d'heures de cours

D : le nombre d'heures d'enseignement dirigé (TD)

Le nombre des inscrits aux examens de passage en 2ème année est de 500 étudiants

1) Quelles conclusions tirez-vous du degré d'homogénéité de cette fonction (1point)
2) Interprétez les exposants en terme de réussite à l'examen (1point)
3) Le prix d'une heure de cours Pc = 3.350 Millimes, celui de l'heure de TD P_D = 2.000 M. Sachant que le budget annuel d'enseignement de l'Institut est de 4.280.000M, déterminer le taux maximum de réussite que l'on peut espérer atteindre(1point)
4) Si l'examen était un concours avec 150 places seulement en 2ème année, de quel budget minimal d'enseignement l'Institut pourrait-il se satisfaire ? (1point)
5) Si l'enseignement était payant, intégralement à la charge des étudiants, combien chacun d'eux devrait-il accepter de payer pour être assuré d'être admis? (1point)
6) Sachant qu'indépendamment des heures d'enseignement, les coûts fixes sont de 2.500.000M, démontrer que l'équation du coût total supporté par l'Institut en fonction du taux de réussite à l'examen est de : $CT(T) = 532.T^{12/7} + 2.500.000$ (1point)

Remarques : arrondir les résultats par défaut, par exemple D = 917,1428571 heures de TD, retenir D = 917 h

Exercice n° 1 (2 points)

Soit la fonction d'utilité: $\boxed{U = (XY) / (X+2Y)}$ où X et Y désignent les quantités consommées de X et Y

Etudier les propriétés de la courbe d'indifférence correspondant à un niveau d'utilité C > 0 (C est une constante) puis faite la représentation graphique.

Exercice n°4 (2 points)

Tracer la carte de préférence d'un consommateur (composé de 3 courbes d'indifférence avec ($I_0 < I_1 < I_2$) et désigner le point d'équilibre, lorsqu'il consomme les couples suivants de biens dans les conditions suivantes :

a) Il aime le café (en abscisse) mais n'aime ni déteste le thé
b) Il a toujours besoin à la fois d'une chaussure gauche et d'une droite
c) Le chocolat et la confiture sont de parfait substituts et lui procurent une égale satisfaction
d) L'eau (en ordonné) a bon goût et le vin le rend malade.

Exercice n°5 **(4 points)**

Un consommateur a pour fonction d'utilité : $\boxed{U = 2X^2Y}$

où X et Y représentent les quantités de biens X et Y consommées.

1) Supposons que R=150, Px=10 et Py= 20

a) Déterminez les expressions de la Courbe consommation-revenu. Interpréter
b) Déterminez l'expression de la courbe d'Engel pour X et pour Y
c) Calculez l'élasticité revenu de la demande du bien X. Interpréter

2) On suppose que Px varie, P'x = 5, Py et R restant constants

a) Suite à ce changement, mettez en évidence l'effet de substitution et l'effet de revenu pour les biens X et Y, en utilisant la méthode de Hicks
b) Déterminez l'expression de la courbe Consommation-prix, puis exprimer l'équation de la fonction de demande du bien X en fonction du prix ;
c) Donnez l'élasticité–prix et l'élasticité-prix croisée de la demande du bien X. Interprétez.

Eléments de corrigé

PROBLEME

Le produit Y = taux de reussite

Les facteurs de production K et L = les volumes horaires de cours et TD

1°/ La fonction T = f(C,D) étant de type Cobb Douglas, elle est homogéne de degré 7/12 (1/3+1/4) < 1. Ce qui implique que les rendements sont décroissants.

Cela signifie, si l'on doublait les horaires d'enseignements dispensés aux étudiants, on ne doublerait pas pour autant le taux de reussite à l'examen.

2°/La fonction est de la forme Cobb-Dougass, 1/3 et 1/4 sont les élasticités du taux de reussite, respectivement par rapport aux heures de cours et aux heures de TD. Ainsi :

- si on augmente les heures de cours de 1%, le taux de reussite augmente de 0,333%
- si on augmente les heures de TD de 1% le taux d e reussite augmente de 0,25%

Donc une augmentation en pourcentage des heures de cours a plus d'impact sur le taux de reussite qu'une même augmentation des heures de TD

3°/ Programme : $\begin{cases} \max \quad T = C^{1/3}.D^{1/4} \\ SC \quad 4\,280\,000 = 3\,350\,C + 2\,000\,D \end{cases}$

A l'équilibre on a :

$$\begin{cases} \bullet \ TMS = (\partial T/\partial D) / \partial T/\partial C = P_D / P_C \Longrightarrow \boxed{C = 4/3\ .\ 200/335\ D} \\ \bullet \ B = P_c.C + P_D.D \Longrightarrow 4\,280\,000 = 3\,350\,(4/3.200/335\ D) + 2\,000\,D \end{cases}$$

On obtient : D ≅ 971 heures
C ≅ 730 heures
T ≅ 49,5 %
Le taux de reussite maximum qu'on peut atteindre est de 49,5%

4°/ 150 étudiats sur 500 vont reussir en 1ère année. Cela revient à imposer un taux de reussite T = 30% (150/500 = 30%)

le minimum de budget Programme : $\begin{cases} \text{Min } B = 3\,350.C + 2\,000.D \\ SC \quad 30 = C^{1/3}.D^{1/4} \end{cases}$

A l'équilibre on a :

$$\begin{cases} \bullet \ \tfrac{3}{4}\ C/D = 2000 / 3350 \qquad C = 8000/10050\ D \\ \bullet \ 30 = C^{1/3}.D^{1/4} = (8000/10050\ D)^{1/3}\ .\ D^{1/4} \end{cases}$$

On obtient : $D \cong 388$ heures
$C \cong 309$ heures
$B \cong 1\ 811\ 150$ Millimes
Le budget nécessaire pour obtenir un taux de reussite de 30% est de 1 811 150 M. Ce budget est nettement inferieur par rapport au cas ou le taux de reussite est de T=49,5%.

5°/ Budget nécessire pour être sure de reussir câd pour avoir un taux de reussite de T=100%
Budget d'un T=100% Programme : $\begin{cases} \text{Min } B = 3\,350.C + 2\,000.D \\ \text{SC } 100 = C^{1/3}.D^{1/4} \end{cases}$

A l'équilibre on a :

$$\begin{cases} \bullet\ \frac{3}{4}\, C/D = 2000 / 3350 \qquad C = 8000/10050\ D \\ \bullet\ 100 = C^{1/3}.D^{1/4} = (8000/10050\ D)^{1/3}\ .\ D^{1/4} \end{cases}$$

On obtient : $D \cong 3\ 056$ heures
$C \cong 2\ 433$ heures
$B \cong 14\ 260\ 000$ Millimes
Le budget nécessaire pour obtenir un taux de reussite de 100% est de 14 260 000 M environ. Le coût par étudiant serait (14 260 000 / 500) de $\boxed{\text{28 500 M}}$ environ

6°/ Le probléme consiste à déduire la fonction de coût de la fonction de production :

Systéme :

$$\begin{cases} (1) \quad T = C^{1/3}.D^{1/4} \\ (2) \quad \frac{3}{4}\, C/D = 2000 / 3350 \\ (3) \quad CT = 3\,350.C + 2\,000.D + 2\,500\,000 \end{cases}$$

Les inconnues sont C, D, T $\Longrightarrow$ on déduit une relation entre CT et T qui est la fonction de coût cherchée.
L'équation (2) permet d'éliminer C. De (1) et (2) il résulte :

$$\begin{cases} (4) \quad T = (160/201)^{1/3}.D^{7/12} \\ (5) \quad CT = 1400/3.D + 2\,500\,000 \end{cases}$$

De (4) on déduit D en fonction de T $\Longrightarrow D = (10050/8000)^{4/7}.T^{12/7}$
En reportant cette expression dans (5) on obtient la fonction de coût recherchée : $CT(T) = 532.T^{12/7} + 2.500.000$

Exercice n°1

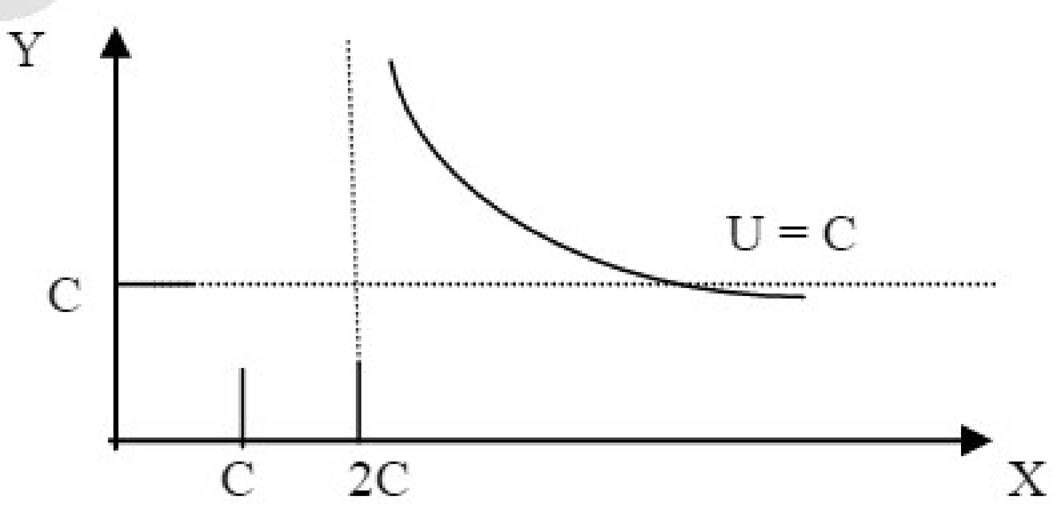
1°/ La courbe d'indifférence de cette fonction a pour équation $\boxed{Y = CX / X\text{-}2C}$

Etude de la forme de la CI :

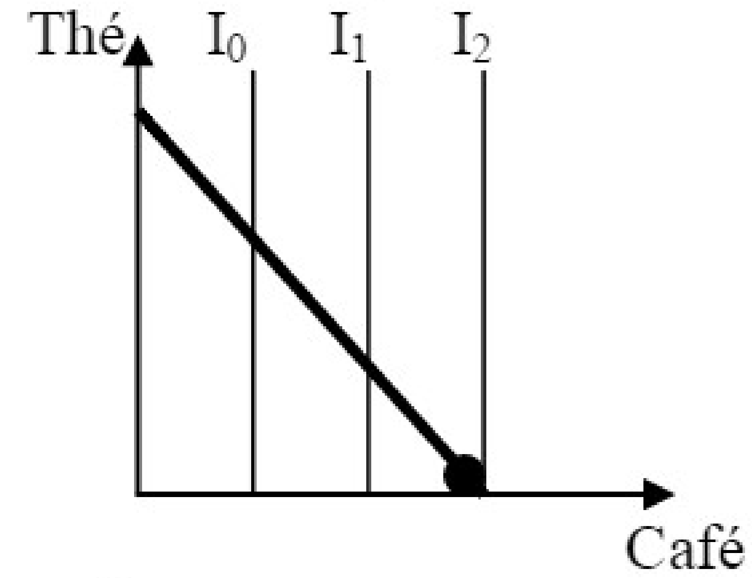
$dY/dX = -\,2\,C^2 / (X - 2\,C)^2 < 0 \Longrightarrow$ la CI est décroissante

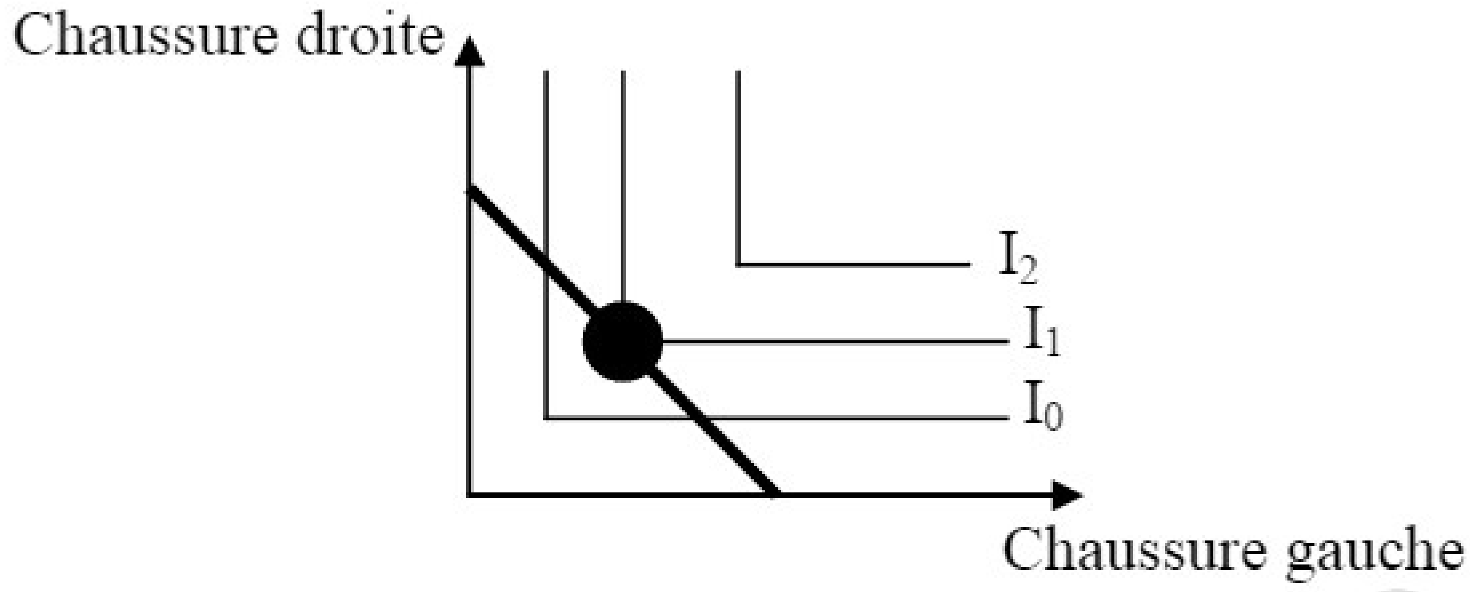
$d2Y/dX2 = 4\,C^2 / (X\text{-}2C)^3 > 0 \Longrightarrow$ la CI est convexe

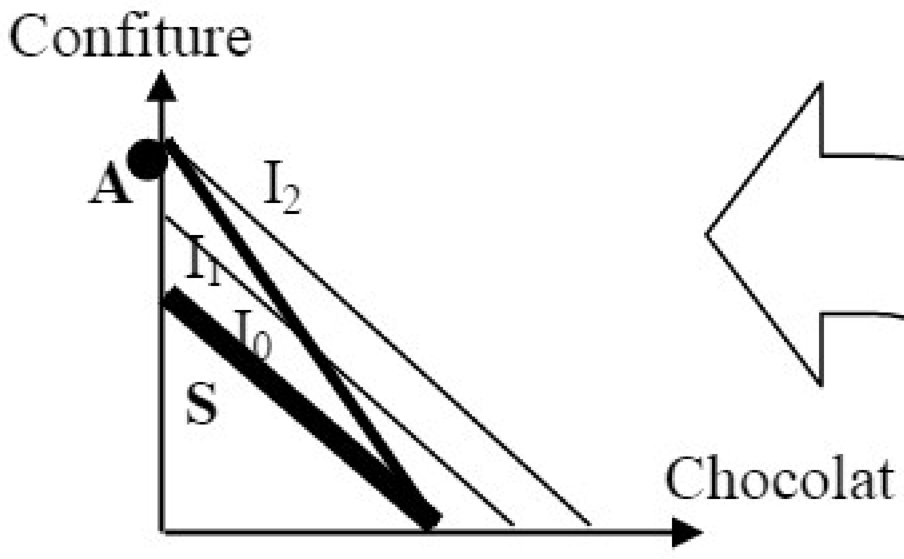
2°/ La CI est décroissante et convexe. Elle admet une asymptote verticale $X = 2C$ et une asymptote horizontale $Y = C$
$X > 0$ et $Y > 0 \Longrightarrow X > 2c$ et $Y > C$

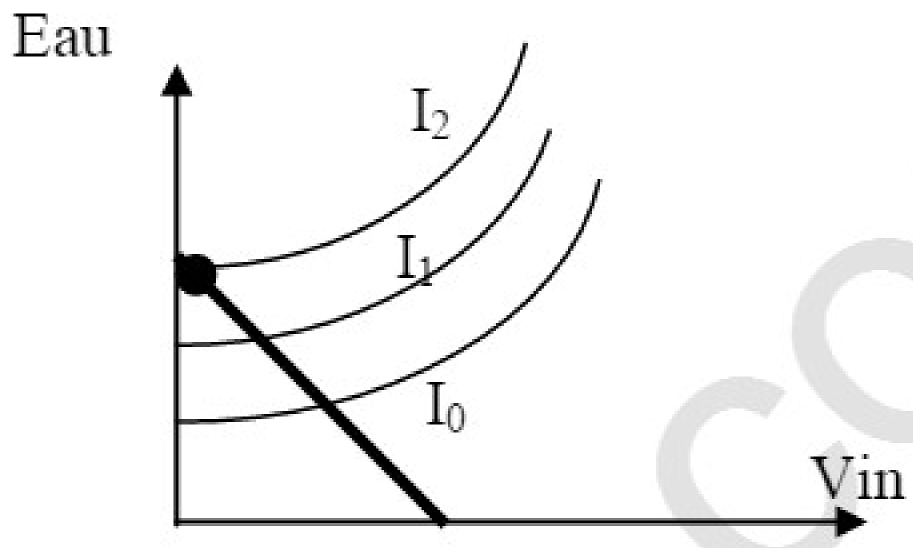


Exercice n°4









Pour ce cas Si les prix sont différents l'optimum est le point A
Si les prix sont identiques, la solution est l'ensemble des points de la droite S

Exercice n°5

a) R = 150, Px=10, Py=20

❖ à l'équilibre on a :

TMS = (∂U/∂X) / (∂U/∂Y) = Px / Py $\Longrightarrow$ 4XY / 2X^2 = 2Y/X = =1/2 $\Longrightarrow$ CCR : $\boxed{Y=X/4}$

CCR = c'est l'ensemble des points représentatifs des combinaisons optimales de X et Y lorsque, les prix des biens restent constants, le budget du consommateur varie.

La particularité de cette CCR : c'est une droite passant par l'origine et de pente ¼

❖ Courbe d'Engel : C'est la courbe de demande individuelle d'un bien en fonction du revenu

Les conditions d'équilibre :

- TMS = (∂U/∂X) / (∂U/∂Y) = Px / Py $\Longrightarrow$ 2Y/X = =Px /Py $\Longrightarrow$ $\boxed{Y= (Px/2Py)\ X}$
- R = Px.X + Py.Y 2R = 3Px.X $\Longrightarrow$ $\boxed{X^d = 2R / 3Px}$ c'est la fonction de demande de X

La courbe d'Engel est la fonction de demande du bien X en fonction du revenu (les prix sont constants), Px = 10 $\boxed{X^d = 1/15 . R}$

Equation de la demande du bien Y en fonction de R (courbe d'Engel)

Y = (Px/2Py).X $\Longrightarrow$ $\boxed{Y^d = R/3Py}$ c'est la fonction de demande de Y

Courbe d'Engel : est la fonction de demande quand les prix sont constants Yd=R/3$\overline{\text{Py}}$

Si Py = 20 $\boxed{Y^d = 1/60. R}$

Particularité : les fonctions de demande individuelles ne dépendent que du revenu et du prix du bien considéré et sont fonctions décroissantes du prix du bien considéré.

❖ $e_{X/R}$ = dX/dR . R/X = 2/3Px . R/(2R/3Px) = 1

Si le revenu augmente de 1% la quantité consommée du bien X augmente de 1%

$e_{X/R} > 0$ $\Longrightarrow$ le bien X est un bien normal

b) * ES et ER pour U = 2 X^2 Y quand P'x=5

Situation initiale :

A l'équilibre : $\begin{cases} * \quad TMS = \partial U/\partial Y = Px/Py \Longrightarrow \boxed{Y = X/4} \\ * \quad R = Px.X + Py.Y \Longrightarrow 150 = 10X+20\ (X/4) \quad \boxed{X_0=10\ ;\ Y_0=2,5\ ;\ U_0=500} \end{cases}$

Situation finale P'x = 5:

A l'équilibre : $\begin{cases} * \quad TMS = \partial U/\partial Y = P'x/Py \Longrightarrow \boxed{Y = X/8} \\ * \quad R = P'x.X + Py.Y \Longrightarrow 150 = 5X+20\ (X/8) \quad \boxed{X_2=20\ ;\ Y_2=2,5\ ;\ U_2=2000} \end{cases}$

Situation intermédiaire :

A l'équilibre : $\begin{cases} * \quad TMS = \partial U/\partial Y = P'x/Py \Longrightarrow \boxed{Y = X/8} \\ * \quad 2\ X^2\ Y = U_0 \Longrightarrow 500 = U = 2\ X^2\ (X/8) \quad \boxed{X_1=12,6\ ;\ Y_1=1,57\ ;\ U_0=500} \end{cases}$

ES : En terme de X : $\Delta X = X_1 - X_0 = 12,6 - 10 = +2,6$
En terme de Y : $\Delta Y = Y_1 - Y_0 = 1,57 - 2,5 = -0,93$

ER : En terme de X : $\Delta X = X_2 - X_1 = 20 - 12,6 = +7,4$
En terme de Y : $\Delta Y = Y_2 - Y_1 = 2,5 - 1,57 = +0,93$

ET : En terme de X : $\Delta X = X_2 - X_0 = 20 - 10 = +10$ ou $ES + ER = +2,6 + 7,4 = 10$
En terme de Y : $\Delta Y = Y_2 - Y_0 = 2,5 - 2,5 = 0$ ou $ES + ER = -0,93 + 0,93 = 0$

❖ La courbe consommation-prix (CCP) est le lieu géométrique des points lorsque le prix d'un bien varie, le prix de l'autre bien ainsi que le revenu restent constants.

A l'équilibre :

$\begin{cases} * \ TMS = Px/Py \Longrightarrow Y = Px/2Py.X\ ;\ Py \text{ une constante } =20\ ;\ Px \text{ varie} \Longrightarrow \boxed{Y = (Px/40).X} \\ * \ R = Px.X + Py.Y \Longrightarrow 150 = Px.X + 20\ Y = Px.X + 20\ ((Px/40).X) \Longrightarrow \boxed{Y = 5/2} \end{cases}$

La CCP est une droite horizontale (la quantité optimale de Y ne dépend pas de PX)

Equation de la demande du bien X $\Longrightarrow$ $\boxed{X^d = 2R/3Px}$

Courbe de demande du bien X en fonction de son prix est une fonction décroissante.

❖ $e_{X/Px} = dX/dP_x\ .\ P_x/X = -100/P^2x\ .\ Px/(100/Px) = -1$

La quantité demandée en bien X varie proportionnellement à celle du prix de ce bien

$e_{X/Py} = dX/dP_y\ .\ P_y/X = 0$;La quantité demandée en bien X ne dépend pas du prix du bien Y